3.3 泰勒(Taylor)公式

3.3.1 泰勒(Taylor)多项式

3.3.2 泰勒(Taylor)定理

3.3.3 基本初等函数的麦克劳林公式

3.3.1 泰勒(Taylor)多项式

在分析函数的某些局部性质时，通常用一些简单的函数去近似代替较复杂的函数.多项式函数是最简单的一种函数，因此人们常用多项式来近似表达函数.

前面讲微分时，我们有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0, \ |x - x_0| << 1)$$

优点： 简单、方便，“以直代曲，以常代变”

缺点： 精度不高，不能估计误差的大小 。

设想：用较高次多项式$p_n(x)$近似表示$f(x)$,使 $p_n(x)$ 在点x_0处与 $f(x)$ 有相同的函数值、一阶导数值、直至n阶导数值，并设法找出误差公式.

设 $p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$

$p_n(x_0) = f(x_0)$, $p_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\cdots$ $p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0)$,

则 $p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + n a_n(x-x_0)^{n-1}$

$a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0)$,

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

则 $$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$p_n''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), \qquad a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}p_n''(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \qquad \cdots,$$

$$a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0), \qquad a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}p_n''(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \quad \cdots,$$

$$a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

此式 称为 $f(x)$的 n 阶泰勒多项式 .

$$f(x) - P_n(x) = \ ? \quad 求 f(x) - P_n(x) = R_n(x)$$

给定具有高阶导数的函数 $f(x)$,

在点 x_0附近用多项式函数逼近

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$p_n(x_0) = f(x_0),\quad p_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\because \quad p_n^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\therefore \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

3.3.2 泰勒(Taylor)定理

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ①称为 $f(x)$ 的 n **阶泰勒公式**.

公式 ②称为 n 阶泰勒公式的**拉格朗日余项**.

NJUPT

证明　令 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$，

多次应用柯西中值定理，可得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

当在 x_0 的某邻域内 $|f^{(n+1)}(x)|\le M$ 时

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$\therefore\ R_n(x)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)$$

注意到 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ③

在不需要余项的精确表达式时，泰勒公式可写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为n 阶泰勒公式的**佩亚诺(Peano) 余项**.

* 可以证明:

$f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有 $n-1$

阶导数,且$f^{(n)}(x_0)$存在

⟹ ④ 式成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

特例:

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式 给出拉格朗日中值定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n=1$ 时， 泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

可见 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

$\mathrm{d}f$

误差 $R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在泰勒公式中若取 $x_0=0, \xi=\theta x \ (0<\theta<1)$, 则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为**麦克劳林（Maclaurin）公式**．

由此得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$, 则有误差估计式

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}$$

3.3.3 几个初等函数的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(1) $f(x)=e^x$

$\because \quad f^{(k)}(x)=e^x, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$

$f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处的各阶泰勒多项式为

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^x\approx P_0(x)=1$$

$$e^x\approx P_1(x)=1+x$$

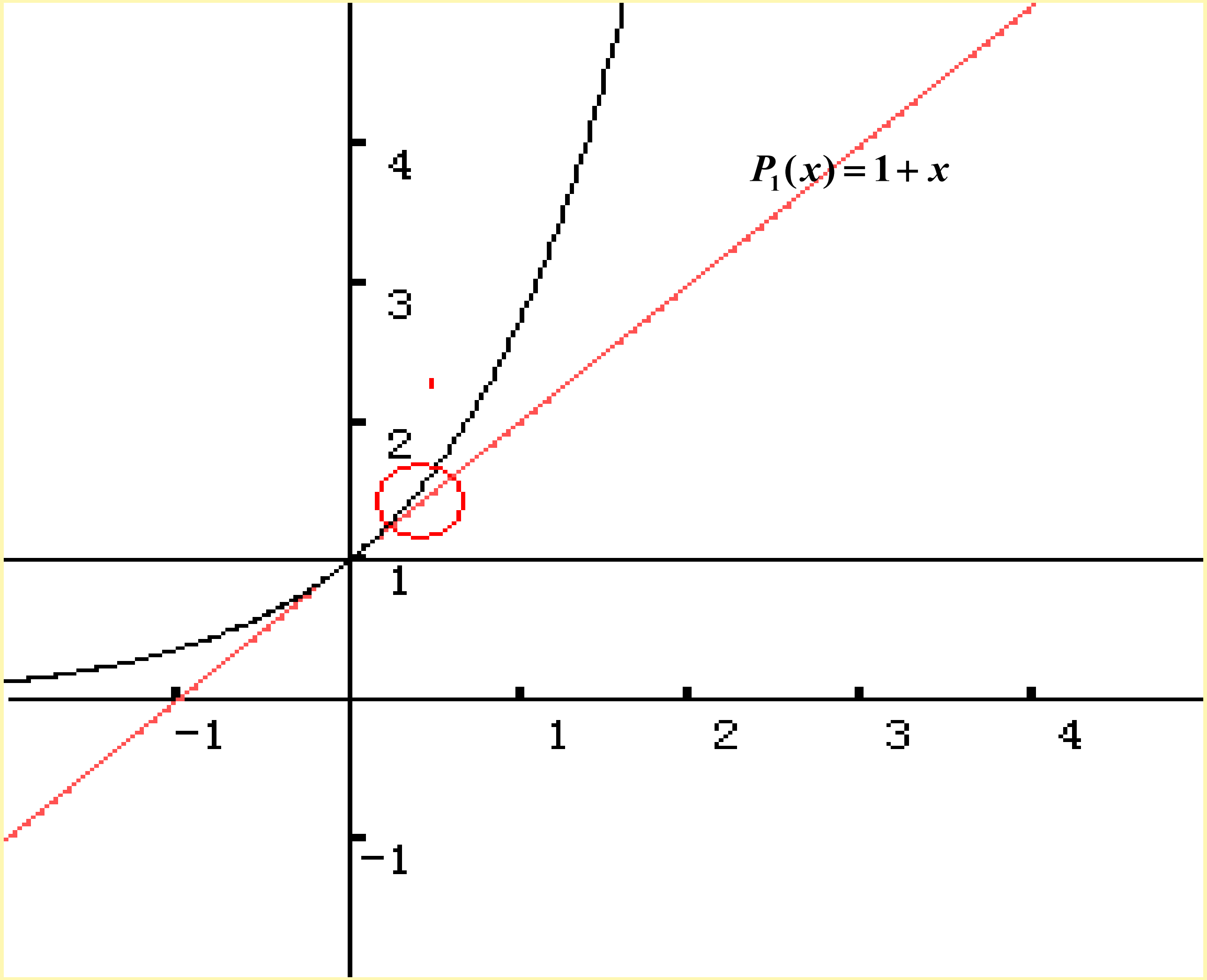
$$e^x\approx P_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}$$

$$e^x\approx P_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

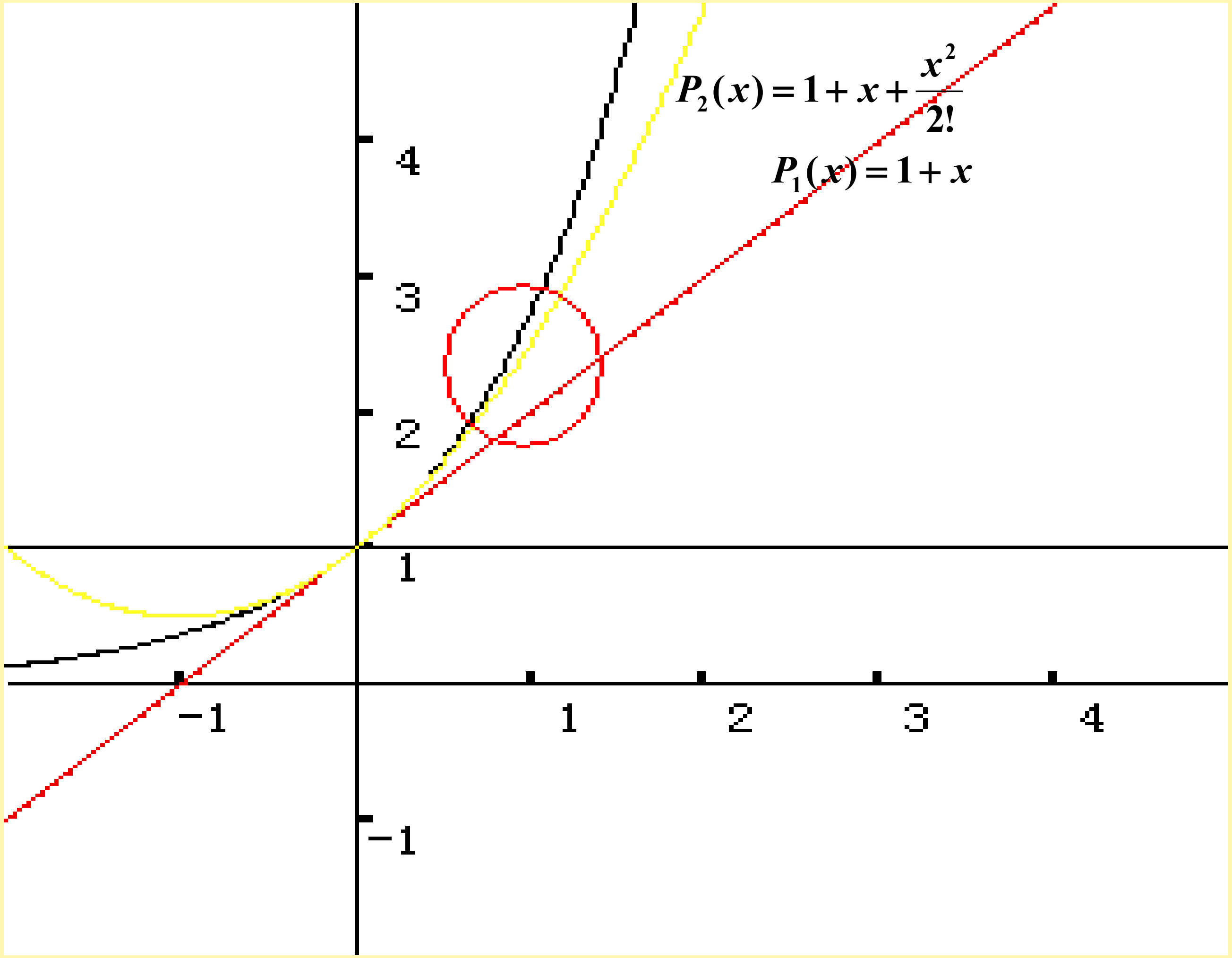
$$e^x\approx P_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

……

图形演示

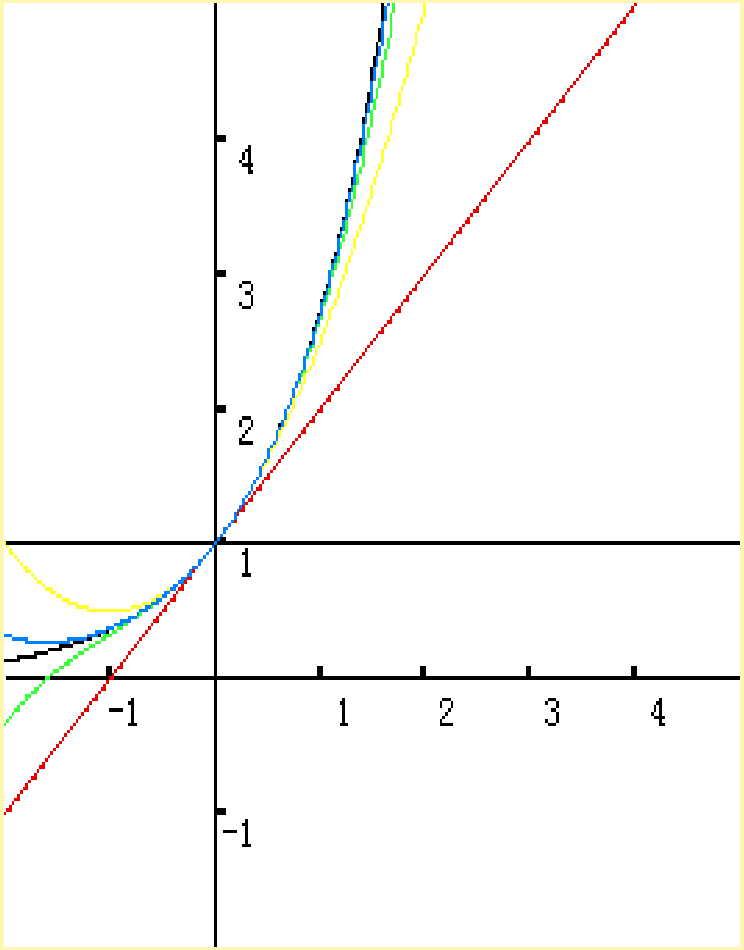


图形演示



$$e^x \approx P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

数值实验



$x = 1 \quad e = 2.71828\cdots$

$P_1(1) = 2.00000$

$P_2(1) = 2.50000$

$P_3(1) = 2.66667$

$P_4(1) = 2.70833$

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $$R_{2m}(x)=\frac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$$

(3) $f(x) = \cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{\cos(\theta x + \frac{2m+2}{2}\pi)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$(0<\theta<1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

例 1 将 $f(x)=\ln x$在$x_0=1$处展开成n阶泰勒公式.

直接展开法

解 $f(x)\big|_{x=1}=0,\quad f'(x)\big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,$

$$f''(x)\big|_{x=1}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1}=-1,\quad \cdots,$$

$$f^{(n)}(x)\big|_{x=1}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\Big|_{x=1}=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\therefore \ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

间接展开法?

（ξ 位于 x 与 1之间）

例 1 将 $f(x)=\ln x$在$x_0=1$处展开成n阶泰勒公式.

直接展开法

$$\therefore \ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

（ξ 位于 x 与 1之间）

间接展开法?

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

例 1 将 $f(x)=\ln x$在$x_0=1$处展开成n阶泰勒公式.

令 $t=x-1$

求$\ln x=\ln(1+t)$在$t_0=0$ 处展开成n阶泰勒公式

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+\frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(1+\theta t)^{n+1}}$$

$$\therefore \ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

（ξ 位于 x 与 1之间）

例2 **求e^{-x^2}带佩亚诺型余项的麦克劳林展式。**

间接展开法

□ $\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\therefore e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$$

思考: $\left(e^{-x^2}\right)^{(2020)}\Big|_{x=0} = ?$ $\frac{f^{(2020)}(0)}{2020\,!} = \frac{(-1)^{1010}}{1010\,!}$

NJUPT

例3 将 $f(x)=x^3-2x+5$ 按$x-1$的乘幂展开。

解 法一 $f(x)=[(x-1)+1]^3-2[(x-1)+1]+5$

$$=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1-2(x-1)-2+5$$

$$=4+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

法二 $f(1)=4$, $f'(1)=(3x^2-2)\big|_{x=1}=1$

$f''(1)=6x\big|_{x=1}=6$, $f'''(1)=6$, $f^{(4)}(x)=0$

$$f(x)=4+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

注意：$\boldsymbol{f(x)=P_3(x)}$, $\boldsymbol{R_n(x)=0}$ (当 $\boldsymbol{n\geq 3}$)

例5 用近似公式 $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}$ 计算cos x 的近似值，使其精确到0. 005，并确定 x 的适用范围.

解 近似公式的误差

$$\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x+\frac{4}{2}\pi)\right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$

解得 $|x| \le 0.588$

即当 $|x| \le 0.588$ 时，由给定的近似公式计算的结果能准确到 0. 005 .

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$. 用洛必塔法则不方便！

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2+\sqrt{4-3x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3x}{4}}-1\right)+2\left(\sqrt{1-\frac{3x}{4}}-1\right)}{x^2}$$

✗ $$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{3x}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3x}{4}\right)}{x^2}$$

$$=0$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}-1\right]+2\left[(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}-1\right]}{x^2}$$

$$\times\ =\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x+o(x)\right]+2\left[\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{4}x)+o(x)\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=?$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)\right]+2\left[\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{4}x)-\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)$$

$$(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(-\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

用洛必塔法则不方便！

解 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2\sqrt{1+\frac{3}{4}x}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

例8 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证明 $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

小结

1. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n)$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

当 $x_0 = 0$ 时为**麦克劳林公式** .

2. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x, \quad \ln(1 + x), \quad \sin x, \quad \cos x, \quad (1 + x)^\alpha$$